سری ها: در فصل قبل حل معادلات با ضرایب متغیر را فقط در حالت های خاص بررسی کردیم. معادله

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$ را در نظر بگیرید. نقطه ای مانند x_0 را که $P(x_0)\neq 0$ باشد نقطه عادی می نامند.

نقطه ای مانند x_0 که $P(x_0)=0$، نقطه غیر عادی (تکین) نامیده می شود.

در روش سری ها سعی داریم جواب معادله را در اطراف نقطه $x=x_0$ به صورت سری توانی بدست آوریم.

فرض کنید $x=0$ یک نقطه عادی ($P(0)\neq 0$) معادله باشد (اگر در هر نقطه ای غیر از $x_0=0$ بخواهیم جواب معادله را به دست آوریم با تغییر متغیر $t=x-x_0$ به نقطه $t=0$ می رسیم):

$$y=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

$$y'=\sum_{n=1}n a_n x^{n-1} \qquad y''=\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

مثال: معادله زیر را به روش سری حول نقطه $x=0$ حل کنید.

$$y''+y=0$$

$$y=\sum_{n=0}a_nx^n \quad , \quad y''=\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$\sum_{n=2}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=0}a_nx^n=0$$

① توان x ها یکی باشد.
② اندیس شروع سری ها یکی باشد.

$$\sum_{n=0}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n+\sum_{n=0}a_nx^n=0 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n\right]x^n=0$$

$$\Rightarrow a_{n+2}=\frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad \overset{n=0}{a_2=\frac{-a_0}{2\times1}} \ , \ \overset{n=2}{a_4=\frac{-a_2}{4\times3}} \ \dots \ a_{2k}=\frac{(-1)^k a_0}{(2k)!}$$

$n=1 \qquad n=3$

$$a_3 = \frac{-a_1}{3\times2\times1} \qquad a_5 = \frac{-a_3}{5\times4} = \frac{a_1}{5\times4\times3\times2}, \dots, \quad a_{2k+1} = \frac{a_1(-1)^k}{(2k+1)!}$$

$$\sum_{n=0} a_n x^n = \sum_{k=0} a_{2k} x^{2k} + \sum_{k=0} a_{2k+1} x^{2k+1} = a_0 \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + a_1 \sum_{k=0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

مثال:
$$y'' - xy' - y = 0 \qquad x=0$$

$$\sum_{n=2} n(n-1) a_n x^{n-2} - \sum_{n=1} n a_n x^n - \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\sum_{n=0} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n - \sum_{n=1} n a_n x^n - \sum_{n=0} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow (2a_2 - a_0) + \sum_{n=1}^{\infty} x^n \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} - (n+1) a_n\right] = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{a_n}{n+2}$$

$n=0 \qquad n=2$

$$a_2 = \frac{a_0}{2} \qquad a_4 = \frac{a_0}{2\times4}, \quad a_6 = \frac{a_0}{2\times4\times6}, \dots \qquad a_{2k} = \frac{a_0}{2^k \times k!}$$

$n=1 \qquad n=3 \qquad n=5$

$$a_3 = \frac{a_1}{3} \qquad a_5 = \frac{a_1}{3\times5} \qquad a_7 = \frac{a_1}{3\times5\times7} \dots \qquad a_{2k+1} = \frac{a_1 2^k \times k!}{(2k+1)!}$$

$$y = a_0 \sum \frac{x^{2k}}{2^k \times k!} + a_1 \sum \frac{2^k \times k!}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

قضیه: اگر x_0 یک نقطه عادی معادله $P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$ باشد آنگاه جواب عمومی این معادله

به صورت $y = \sum a_n x^n = a_0 y_0 + a_1 y_1$ خواهد بود که a_0 و a_1 ثابت های دلخواه و y_0 و y_1 دو جواب مستقل اند که در $x = x_0$ تحلیلی هستند.

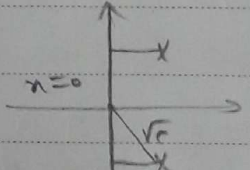
شعاع همگرایی سری های y_0 و y_1 را می توان با روش های ارائه شده در ریاضی ۱ پیدا کرد. این شعاع بازه ای را مشخص می کند که سری با دقت خوبی در معادله دیفرانسیل صدق می کند.

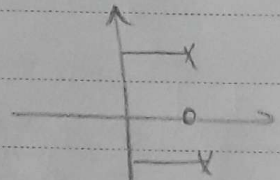
یک روش آسان تر برای بدست آوردن کران پایین شعاع همگرایی y_0 و y_1: شعاع همگرایی y_0 و y_1 حداقل برابر با شعاع همگرایی سری تیلور توابع $p = \frac{Q(x)}{P(x)}$ و $q = \frac{R(x)}{P(x)}$ می باشد.

یادآوری: شعاع همگرایی سری تیلور تابع $\frac{R(x)}{P(x)}$ حول نقطه x_0 برابر است با فاصله ریشه $P(x)=0$ تا نقطه $x=x_0$

مثال: شعاع همگرایی سری تیلور تابع $\frac{1}{x^2-2x+2}$ حول $x=0$ و $x=1$ پیدا کنید.

$x^2-2x+2=0 \to x = 1\pm i$





سری های جواب در اطراف یک نقطه غیرعادی منظم

معادله زیر را در نظر بگیرید:

$$P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0 \qquad x=x_0$$

می دانیم اگر یکی از حد های $\lim_{x\to x_0} \frac{Q(x)}{P(x)}$ یا $\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{P(x)}$ نامتناهی باشد، نقطه $x=x_0$ برای این معادله یک نقطه غیرعادی خواهد بود.

$\frac{x}{x^2}$ $\frac{x^2-\frac{1}{9}}{x^2}$

حالتی را در نظر می‌گیریم که این غیرعادی بودن خیلی شدید نباشد. به عبارتی در این حالت گفته می‌شود نقطه $x=x_0$ یک نقطه غیرعادی ضعیف می‌باشد هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد:

$$P_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$$
$$q_0=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

متناهی باشند.

در این حالت نقطه $x=x_0$ یک نقطه غیرعادی منتظم نامیده می‌شود.

مثال: $(1-x^2)y''-2xy'+y=0 \quad x_0=1$

نقطه $x_0=1$ یک نقطه غیرعادی است $\left(\lim_{x\to1}\frac{-2x}{1-x^2}\right.$ و $\left.\lim_{x\to1}\frac{1}{1-x^2}=\infty\right)$ حال منتظم بودن آن را بررسی می‌کنیم.

$p(x)=1-x^2 \,,\, Q(x)=-2x \,,\, R(x)=1$

$$P_0=\lim_{x\to1}(x-1)\frac{-2x}{1-x^2}=1 \,,\quad q_0=\lim_{x\to1}(x-1)^2\frac{1}{1-x^2}=0$$

چون P_0 و q_0 متناهی هستند پس نقطه $x_0=1$ نقطه غیرعادی منتظم می‌باشد.

حال به دنبال حل معادله به روش سری‌ها در اطراف نقاط غیرعادی منتظم می‌باشیم. نظریه عمومی این مبحث را فروبنیوس ریاضیدان آلمانی ارائه کرد که پیچیده است و در اینجا به ارائه نظریه‌ها می‌پردازیم و راه حل را ارائه می‌کنیم.

به معادله کلی $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ باز می‌گردیم. فرض کنید $x=0$ یک نقطه غیرعادی منتظم

است. طرفین را در x^2 ضرب می‌کنیم:

$$x^2 p(x) y'' + x^2 Q(x) y' + x^2 R(x) y = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 y'' + x\left(\frac{xQ(x)}{p(x)}\right) y' + \frac{x^2 R(x)}{p(x)} y = 0$$

چون $x=0$ یک نقطه غیرعادی منظم است، عبارت‌های $\frac{xQ(x)}{p(x)}$ و $\frac{x^2 R(x)}{p(x)}$ در اطراف نقطه $x=0$

متناهی هستند و می‌توان سری توانی آنها را نوشت.

$$\frac{xQ(x)}{p(x)} = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots$$

$$\frac{x^2 R(x)}{p(x)} = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \cdots$$

این سری‌ها را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$x^2 y'' + (p_0 + p_1 x + \cdots) x y' + (q_0 + q_1 x + \cdots) y = 0$$

اگر غیر از p_0 و q_0 از بقیه p_n و q_n ها صرف نظر کنیم:

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0$$

این معادله اویلر است جواب آن را x^r در نظر می‌گیریم:

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0$$

بحث را به $x>0$ محدود می‌کنیم اگر $x<0$ با تغییر متغیر $x=-t$، $t>0$ خواهد بود. با خاطر ترم های

چند جمله‌ای موجود در معادله (۲) پاسخ آن به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

۱) p_0 و q_0 را حساب کنیم.

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)}$$

۲) r_1 و r_2 را حساب کنیم.

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0$$

۳) پاسخ معادله را به صورت $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$ در نظر گرفته و با جایگذاری در معادله $a_n(r)$ را پیدا کنید.

۴) به ازای $r = r_1$ و $a_0 = 1$ $\Leftarrow$

$$y_1 = |x|^{r_1} \left(1 + \sum_{n=1} a_n(r_1) x^n\right)$$

۵) به ازای $r = r_2$ و $a_0 = 1$ $\Leftarrow$

$$y_2 = |x|^{r_2} \left(1 + \sum_{n=0} a_n(r_2) x^n\right)$$

مثال:

$$x^2 y'' + x y' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0 \qquad x > 0, \; x = 0$$

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 0} x \frac{x}{x^2} = 1$$

$$q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{x^2 - \frac{1}{9}}{x^2} = -\frac{1}{9}$$

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0 \Rightarrow r^2 - \frac{1}{9} = 0 \rightarrow r = \pm \frac{1}{3}$$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad y' = \sum_{n=0} a_n (n+r) x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0} a_n x^{n+r} (n+r) + \sum_{n=0} a_n x^{n+r+2} - \frac{1}{9} \sum_{n=0} a_n x^{n+r} = 0$$

$\downarrow$

$$\sum_{n=2} a_{n-2} x^{n+r}$$

$$\Rightarrow \left[a_0 r(r-1) + a_0 r - \frac{1}{9} a_0\right] x^r + \left[a_1 r(r+1) + a_1(r+1) - \frac{1}{9} a_1\right] x^{r+1}$$

$$+ \sum \left[a_n\left[(n+r)^2 - \frac{1}{9}\right] + a_{n-2}\right] x^{n+r} = 0$$

$$\left[r^2 - \frac{1}{9}\right] a_0 = 0 \qquad \left[r^2 + 2r + \frac{8}{9}\right] a_1 = 0 \qquad a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}}$$

برای $r = \frac{1}{3}$:

$a_1 = 0 \longrightarrow a_3 = a_5 = a_7 = 0$ فرد

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{n\left(n + \frac{2}{3}\right)}$$ زوج

چون علامت فرد صفر است پس $n = 2m$

$$a_{2m} = \frac{-a_{2m-2}}{2^2\left(m + \frac{1}{3}\right)m}$$

$$a_2 = \frac{-a_0}{2^2\left(1+\frac{1}{3}\right)\times 1} \qquad a_4 = \frac{-a_2}{2^2\left(2+\frac{1}{3}\right)2} = \frac{a_0}{2^4\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)1\times 2}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{2^2\left(3+\frac{1}{3}\right)3} = \frac{-a_0}{2^6\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\left(3+\frac{1}{3}\right)1\times 2\times 3}$$

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(2+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(m+\frac{1}{3}\right)m!}$$

$$y_1 = |x|^{r_1}\left(1 + \sum_{n=1} a_n(r_1) x^n\right) \rightarrow y_1 = x^{\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{m=1} \frac{(-1)^m}{2^{2m}\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(m+\frac{1}{3}\right)m!} x^{2m}\right)$$

$$y_2 = x^{-\frac{1}{3}}\left(1 + \sum_{m=1} \frac{(-1)^m}{m!\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(m-\frac{1}{3}\right)2^{2m}} x^{2m}\right) \qquad y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

مثال:

$xy'' + 1y' - 1y = 0 \qquad x>0 \,,\, x=0$

$P(x) \quad Q(x) \quad R(x)$

$P_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1 \,,\, q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{-1}{x} = 0$

$r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0 \longrightarrow r^2 = 0 \longrightarrow r = 0, 0$

$y = \sum_{n=0} a_n x^{n+r} \qquad y' = \sum a_n (n+r) x^{n+r-1} \qquad y'' = \sum_{n=0} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-2}$

$\Rightarrow \sum_{n=0} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r-1} + \sum_{n=0} a_n (n+r) x^{n+r-1} - \underbrace{\sum_{n=0} a_n x^{n+r}}_{\sum_{n=1} a_{n-1} x^{n+r-1}} = 0$

$\Rightarrow \left[a_0 r(r-1)x^{r-1} + a_0 r x^{r-1}\right] + \sum \left[a_n (n+r)^2 - a_{n-1}\right] x^{n+r-1} = 0$

$\begin{cases} r^2 a_0 = 0 \longrightarrow \checkmark \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2} \end{cases}$ جمله بازگشتی

$a_n = \frac{a_{n-1}}{(n+r)^2} \xrightarrow{r=0} a_n = \frac{a_{n-1}}{n^2}$

$a_1 = \frac{a_0}{1^2} \,,\, a_2 = \frac{a_0}{1^2\times 2^2} \,,\, a_3 = \frac{a_0}{1^2\times 2^2\times 3^2} \,,\, \ldots$

$y_1 = x^0\left[1 + \sum_{n=1} \frac{1}{(n!)^2} x^n\right]$

چون معادله $r_1 = r_2 = 0$ شد باید روشی برای بدست آوردن جواب مستقل دوم بدست آورد.

معادله بسل: این معادله کاربرد فراوانی در مسائل مهندسی داشته و به صورت زیر است:

$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ ν یک عدد حقیقی بوده و رتبه معادله نامیده می‌شود.

مثلاً معادله بسل رتبه $\frac{1}{3}$: $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{9})y=0$

مثال: معادله بسل رتبه صفر را حول $x=0$ پیدا کنید.

$$\Rightarrow x^2y''+xy'+x^2y=0 \qquad x=0 \quad \nu=0$$

$$p_0=\lim_{x\to 0}\frac{xQ(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 0} x\,\frac{x}{x^2}=1$$

$$q_0=\lim_{x\to 0}\frac{R(x)}{P(x)}x^2=0$$

چون p_0 و q_0 متناهی هستند، نقطه $x=0$ غیرعادی منظم می‌باشد:

$$r^2+(p_0-1)r+q_0=0 \to r^2=0 \to r=0,0$$

$$y=\sum_{n=0} a_n x^{n+r} \qquad y'=\sum_{n=0} a_n(n+r)x^{n+r-1} \quad , \quad y''=\sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0} a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r}+\sum_{n=0} a_n(n+r)x^{n+r}+\sum_{n=0} a_n x^{n+r+2}=0$$

$$\text{"} \qquad + \qquad \text{"} \qquad + \sum_{n=2} a_{n-2}x^{n+r}=0$$

$$\Rightarrow \left[a_0r(r-1)+a_0r\right]x^r+\left[a_1(r+1)^2\right]x^{r+1}+\sum_{n=2}\left[a_n(n+r)^2+a_{n-2}\right]x^{n+r}=0$$

$$a_0r^2=0 \quad (1) \qquad a_1(r+1)^2=0 \quad (2) \qquad a_n=\frac{-a_{n-2}}{(n+r)^2} \quad (3)$$

$$\Rightarrow 0=0 \qquad a_1=0 \qquad a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}$$

Subject :
Date

$a_3 = a_5 = a_7 = a_{2n+1} = 0$

$a_{2m} = -\dfrac{a_{2m-2}}{2^2 \times m^2} \Rightarrow a_2 = \dfrac{-a_0}{2^2 \times 1^2}$

$a_4 = \dfrac{a_0}{2^4 \times (1\times 2)^2} \Rightarrow a_{2m} = \dfrac{(-1)^m a_0}{2^{2m} \times (m!)^2}$

$\Rightarrow y = 1 + \sum_{m=1} \dfrac{(-1)^m}{2^{2m} \times (m!)^2} x^{2m} = J_0 \rightarrow$ پاسخ معادله مرتبه صفر بسل

* چون $r_2 = r_1$ برای بدست آوردن جواب دوم از روشی که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

$r_1 = r_2$ یا $r_1 - r_2 = N$ → عدد طبیعی؛ در این حالت ممکن است دو جواب مستقل نباشند.

سری جواب در اطراف نقطه غیرعادی منظم

قضیه: معادله دیفرانسیل $L(y) = x^2 y'' + x(xp(x))y' + x^2 q(x) y = 0$ ① را که $x = 0$ یک نقطه غیرعادی منظم است در نظر بگیرید.

اگر S شعاع همگرایی سری توابع $xp(x)$ و $x^2 q(x)$ باشد آنگاه معادله ① در فواصل $0 < x < S$ و $-S < x < 0$ دارای دو جواب مستقل می‌باشد.

$y_1(x) = |x|^{r_1} \left(1 + \sum_{n=1} a_n(r_1) x^n\right)$

محاسبه y_1 دقیقاً مانند قبل می‌باشد

اگر $r_1 = r_2$:

$y_2(x) = y_1(x) \ln x + |x|^{r_2} \sum_{n=1} b_n(r_1) x^n$

اگر $N = r_1 - r_2$ یک عدد صحیح مثبت باشد $(r_1 > r_2)$

PAPCO

$$y_2 = a y_1(x) \ln|x| + |x|^{r_2}\left(1 + \sum c_n(r_2) x^n\right)$$

پس در این دو حالت ($r_1 = r_2$ و $N = r_1 - r_2$) y_1 ها مثل قبل محاسبه می‌شود ولی برای محاسبه y_2 باید a، b_n و c_n را طبق روابط زیر محاسبه کرد.

$$b_n(r_1) = \frac{d}{dr} a_n(r) \Big|_{r=r_1}$$

$$c_n(r_2) = \frac{d}{dr}\left[(r - r_2) a_n(r)\right] \Big|_{r=r_2}$$

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_N(r) \qquad N = r_1 - r_2$$

نکته بسیار مهم: اگر $a_N(r)$ متناهی باشد، طبق رابطه فوق $a = 0$ بوده، جمله $\ln x$ دار در y_2 ظاهر نشده، این نشان دهنده این است که با اینکه $r_1 - r_2$ عددی صحیح است، r_2 منجر به جواب مستقل می‌شود پس نیازی به این روابط نیست و y_2 هم مانند y_1 (مثل بخش قبل) حساب می‌شود.

مثال:

$$x^2 y'' + 2xy' + xy = 0 \qquad x = 0$$

$$p_0 = \lim_{x \to 0} x \frac{2x}{x^2} = 2 \qquad q_0 = \lim_{x \to 0} x^2 \frac{x}{x^2} = 0$$

$$r^2 + (p_0 - 1) r + q_0 = 0 \Rightarrow r^2 + r = 0 \Rightarrow r = 0, -1$$

تفاضل صحیح شد

ابتدا y_1 را به ازای r بزرگتر محاسبه می‌کنیم ($r = 0$)

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \xrightarrow{\text{جایگذاری در معادله}}$$

$$\sum_{n=0} a_n (n+r)(n+r-1) x^{n+r} + \sum_{n=0} 2a_n (n+r) x^{n+r} + \sum_{n=0} a_n x^{n+r+1} = 0$$

توان ها را یکی کردیم

$$\text{''} + \text{''} + \sum_{n=1} a_{n-1} x^{n+r} = 0$$

$$[a_0 r(r-1) + 2a_0 r] x^r + \sum [a_n (n+r)(n+r+1) + a_{n-1}] x^{n+r} = 0$$

$$\Rightarrow a_0(r^2+r) = 0 \xRightarrow{r=0} 0 = 0 \checkmark$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{-a_{n-1}}{(n+r)(n+r+1)} \qquad a_1 = \frac{-a_0}{(r+1)(r+2)}$$

$$a_2 = \frac{-a_1}{(r+2)(r+3)} = \frac{a_0}{(r+1)(r+2)^2(r+3)}$$

$$a_3 = \frac{-a_2}{(r+3)(r+4)} = \frac{-a_0}{(r+1)(r+2)^2(r+3)^2(r+4)}$$

$$a_n(r) = \frac{(-1)^n a_0}{(r+1)(r+2)^2(r+3)^2 \cdots (r+n)^2 (r+n+1)}$$

$$r=0 \qquad a_n = \frac{(-1)^n a_0}{n!(n+1)!}$$

برای بدست آوردن y_1:

$$\Rightarrow y_1 = 1 + \sum \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} x^n$$

حال باید a را بدست آوریم:

$$a = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_1(r) = \lim_{r \to -1} (r+1) a_1(r)$$

$N \to 0 - (-1) = 1$

$$a_1(r) = \frac{-1}{(r+1)(r+2)} \qquad \text{فرض } a_0 = 1$$

حاصل a صفر نشد پس باید c_n را بدست آوریم:

$$a = \lim_{r\to -1} (r+1)\frac{-1}{(r+1)(r+3)} = -1$$

$$c_n = \frac{d}{dr}\left((r-r_1)a_n(r)\right)\Big|_{r=r_1}$$

$$c_n = \frac{d}{dr}\left[\frac{(r+1)(-1)^n}{(r+1)(r+2)^2\cdots(r+n)^2(r+n+1)}\right] = \frac{d}{dr}\left[\frac{(-1)^n}{(r+2)^2\cdots(r+n)^2(r+n+1)}\right]$$

$$G = \frac{1}{(r+2)^2(r+3)^2\cdots(r+n)^2(r+n+1)}$$

$$\ln G = -2\ln(r+2) - 2\ln(r+3) \cdots - 2\ln(r+n) - \ln(r+n+1) \xrightarrow{\text{مشتق}}$$

$$\frac{G'}{G} = \frac{-2}{r+2} - \frac{2}{r+3} \cdots - \frac{2}{r+n} - \frac{1}{r+n+1}$$

$$\Rightarrow \frac{G'(-1)}{G(-1)} = \frac{-2}{1} - \frac{2}{2} - \frac{2}{3} \cdots - \frac{2}{n-1} - \frac{1}{n} = -H_n - H_{n-1}$$

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$G(-1) = \frac{1}{1^2 \times 2^2 \times \cdots \times (n-1)^2(n)} = \frac{1}{n!(n-1)!}$$

$$G'(-1) = -(H_n + H_{n-1}) \Rightarrow G'(-1) = -\frac{(H_n + H_{n-1})}{n!(n-1)!}$$

$n+1$

$$c_n = \frac{(-1)(H_n + H_{n-1})}{n!(n-1)!}$$

PAPCO

تبدیل لاپلاس

اگر تابع $f(t)$ به ازای $t>0$ تعریف شده باشد و در شرایطی که خواهیم گفت صدق کند آنگاه این صورت تبدیل لاپلاس $f(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$L\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt$$

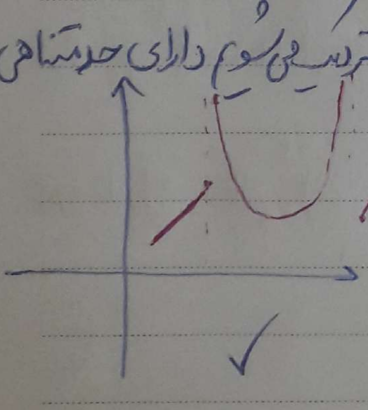
یادآوری

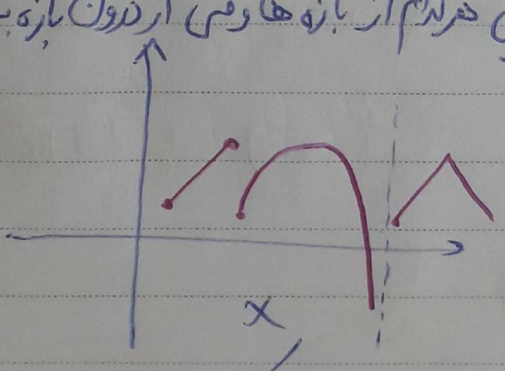
- انتگرال $\int_0^{\infty} f(t)dt$ را همگرا گویند هرگاه حد زیر موجود باشد $\lim_{b\to\infty}\int_0^{b} f(t)\,dt$
- اگر انتگرال $\int_0^{\infty} |f(t)|\,dt$ همگرا باشد، $\int_0^{\infty} f(t)dt$ را مطلقاً همگرا می‌گویند
- اگر تابع $g(x)$ موجود باشد که $|f(x)|<g(x)$ و $\int_0^{\infty} g(x)\,dx$ همگرا باشد، $\int_0^{\infty} f(x)dx$ نیز همگرا خواهد بود

تعریف: تابع $f(x)$ در بازه $\alpha < x < \beta$ پیوسته قطعه‌ای گویند هرگاه بتوان این بازه را به تعداد متناهی نقطه $\alpha = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = \beta$ تقسیم کرد که

(1) $f(x)$ روی هر کدام از بازه‌های $x_i < x < x_{i+1}$ پیوسته باشد.

(2) $f(x)$ در نقاط ابتدایی و انتهایی هر کدام از بازه‌ها وقتی از درون بازه به آن نقطه نزدیک می‌شوم دارای حد متناهی باشد.





مثال: تبدیل لاپلاس تابع $f(t)=t$ را پیدا کنید $(t>0)$

$s>0$

$$L\{f(t)\}=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt=\int_0^{\infty} t e^{-st}\,dt=\frac{-t}{s}e^{-st}\Big|_0^{\infty}-\int_0^{\infty}-\frac{1}{s}e^{-st}\,dt$$

$$=\frac{-1}{s^2}e^{-st}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{s^2}$$

قضیه: فرض کنید تابع $f(t)$ در $A \geq t \geq 0$ به ازای هر A پیوسته قطعه‌ای باشد و به ازای $t>b$ داشته باشیم

$|f(t)| \leq ke^{at}$ (a، b و k حقیقی بوده و $k, b>0$) در این صورت تبدیل لاپلاس f به ازای هر $s>a$

$$L\{f(t)\}=\int_0^{b} e^{-st} f(t)\,dt+\int_b^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt$$ موجود است.

انتگرال اول همگراست پس انتگرال دوم را بررسی می‌کنیم.

$$\int_b^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt \leq \int_b^{\infty} e^{-st}(ke^{at})\,dt=k\int_b^{\infty} e^{t(a-s)}\,dt=\frac{k}{a-s}e^{t(a-s)}$$

$$a-s<0 \rightarrow a<s$$

مثال: با استفاده از قضیه فوق وجود تبدیل لاپلاس برای $f(t)=t^2$ را بررسی کرده و آن را پیدا کنید.

اولاً تابع $f(t)=t^2$ پیوسته قطعه‌ای است. ثانیاً bای وجود دارد که برای $t>b$، $t^2<e^{at}$ $(a>0)$

پس طبق قضیه تابع $f(t)=t^2$ دارای تبدیل لاپلاس است ($s>0$).

$$L\{t^2\}=\int_0^{\infty} t^2 e^{-st}\,dt=\frac{2}{s^3}$$

مثال: لاپلاس تابع $f(t)=\sin at$ را بیابید.

$$\int_0^{\infty}\sin at\, e^{-st}\,dt=\frac{a}{s^2+a^2} \qquad s>0$$

Subject:
Date

تبدیل لاپلاس e^{at} را بیابید.

$$L\{e^{at}\}=\int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}\,dt=\int_0^\infty e^{t(a-s)}\,dt=\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^\infty=\frac{1}{a-s}\quad s>a$$

خطی بودن تبدیل لاپلاس

$$L\{af(t)+bg(t)\}=aL\{f(t)\}+b\{g(t)\}$$

مثال،

$$L\{\sinh wt\}=L\left\{\frac{e^{wt}-e^{-wt}}{2}\right\}=\frac{1}{2}L\{e^{wt}\}-\frac{1}{2}L\{e^{-wt}\}\quad s>w,\ s>-w$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-w}-\frac{1}{s+w}\right)=\frac{w}{s^2-w^2}\quad s>|w|$$

تابع گاما

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt\quad \alpha>0$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^\infty t^{\alpha}e^{-t}\,dt=-t^{\alpha}e^{-t}\Big|_0^\infty-\int_0^\infty -\alpha e^{-t}t^{\alpha-1}\,dt=\alpha\,\Gamma(\alpha)$$

$$\Gamma(n+1)=n!$$

مثال: تبدیل لاپلاس t^p برای $p>-1$ را بیابید.

$$st=u \Rightarrow du=s\,dt$$

$$L\{t^p\}=\int_0^\infty t^p e^{-st}\,dt$$

$$=\int_0^\infty\left(\frac{u}{s}\right)^p e^{-u}\frac{du}{s}=\frac{1}{s^{p+1}}\int_0^\infty u^p e^{-u}\,du=\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}$$

اگر p عدد صحیح باشد:

$p=n$

$\Gamma(n+1)=n!\qquad L\{t^n\}=\frac{n!}{s^{n+1}}$

خلاصه مباحث در جدول زیر ←

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$s>0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$s>a$
$\sin at$	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$s>0$
$\cos at$	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$s>0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$s>0$
$\sinh at$	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$
$\cosh at$	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$s>\lvert a\rvert$

اگر تبدیل لاپلاس تابع $f(t)$، $F(s)$ باشد، تبدیل لاپلاس $e^{at}f(t)$، $F(s-a)$ خواهد بود.

$$F(s)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$$

$$L\{e^{at}f(t)\}=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)\,dt=\int_0^\infty f(t)e^{-t(s-a)}\,dt=F(s-a)$$

$$L\{e^{2t}\sin 5t\} \qquad F(s)=L\{\sin 5t\}=\frac{5}{s^2+25}$$

$$L\{e^{2t}\sin 5t\}=F(s-2)=\frac{5}{(s-2)^2+25}$$

مثال: تبدیل لاپلاس معکوس توابع زیر را بیابید.

$$y(s)=\frac{s-1}{s^2-s-2}=\frac{a}{s-2}+\frac{b}{s+1}\implies a=\frac{1}{3},\ b=\frac{2}{3}$$

$$y(s)=\frac{\frac{1}{3}}{s-2}+\frac{\frac{2}{3}}{s+1}\xrightarrow{L^{-1}}y(t)=\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{2}{3}e^{-t}$$

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)(s^2+cs+d)(s^3+es^2+fs+g)}=\frac{m_1}{s-a}+\frac{m_2}{s-b}+\frac{m_3 s+m_4}{s^2+cs+d}+\frac{m_5 s^2+m_6 s+m_7}{s^3+es^2+fs+g}$$

$$\frac{1}{(s-a)^n}=\frac{m_1}{s-a}+\frac{m_2}{(s-a)^2}+\cdots+\frac{m_n}{(s-a)^n}$$

اگر s^2+ds+e قابل تجزیه نباشد یعنی می‌توان آن را به صورت $(s-s_0)^2+k^2$ نوشت. که مربوط به ترم های sin و cos می باشد.

مثال:

$$\frac{2s+1}{s^2-2s+2}=\frac{2s+1}{(s-1)^2+1}=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}+\frac{3}{(s-1)^2+1}=2e^t\cos t+3e^t\sin t$$

$$\frac{8s^2-4s+12}{s(s^2+4)}=\frac{a}{s}+\frac{bs+c}{s^2+4}=\frac{3}{s}+\frac{5s-4}{s^2+4}$$

$\xrightarrow{\times s,\ s=0} a=3 \xrightarrow{\text{مخرج مشترک}} b=5,\ c=-4$

$\rightarrow y(t)=3+5\cos 2t-4\sin 2t$

$\frac{4}{(s-1)^3}$ ، $\frac{4}{s^3}\rightarrow 2t^2$ $\quad y(t)=2t^2e^t$

تبدیل لاپلاس مشتق

قضیه: فرض کنید $f(t)$ به ازای هر $0\le t\le A$ پیوسته بوده و $f'(t)$ پیوسته قطعه‌ای است. همچنین فرض کنید ثابت های k ، a و M وجود دارند به طوری که برای $t>M$ ، $|f(t)|<ke^{at}$. در این صورت

تبدیل لاپلاس f' وجود دارد:

$L\{f'\} = sL\{f\} - f(0)$

اثبات: برای تابع پیوسته اثبات می‌کنیم برای پیوسته قطعه‌ای اثبات در کتاب آورده است

$$L\{f'\} = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = e^{-st}f(t)\Big|_0^\infty - \int_0^\infty (-se^{-st})f(t)dt$$

$$\Rightarrow L\{f'\} = -f(0) + sF(s)$$

در حالت کلی:

$$L\{f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

$$L\{y''\} = s^2y(s) - sy(0) - y'(0)$$

مثال: معادله زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید.

$y'' - y' - 2y = 0 \qquad y(0) = 1 ,\ y'(0) = 0$

از طرفین لاپلاس می‌گیریم

$$L\{y''\} = s^2y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2y(s) - s$$

$$L\{y'\} = sy(s) - y(0) = sy(s) - 1$$

$$(s^2y(s) - s) - (sy(s) - 1) - 2y(s) = 0 \longrightarrow y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} \xrightarrow{L^{-1}}$$

$$y(t) = \frac{1}{3}e^{2t} + \frac{2}{3}e^{-t}$$

اگر $y(0)$ را نداد به جای آن a می‌گذاریم و در انتها a را مشخص می‌کنیم.

تبدیل لاپلاس انتگرال:

$$L\left\{\int_0^t f(r)dr\right\} = \frac{F(s)}{s}$$

$f(t) \to F(s)$

$\int_0^t f(r)dr \to \frac{F(s)}{s}$

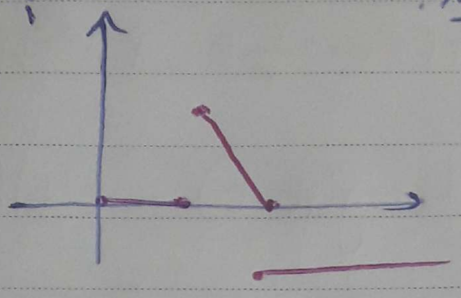
تابع پله: به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$y_c(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<c\\ 1 & t\geq c\end{cases}$$

نمودار تابع زیر را رسم کنید:

$$g(t)=(t-3)u_2(t)-(t-2)u_1(t)$$

$$\begin{cases}0 & 0\le t<1\\ 2-t & 1\le t<2\\ -1 & t\geq 2\end{cases}$$



$$\begin{cases}f_1(t) & t_1<t<t_2\\ f_2(t) & t_2<t<t_3\\ \vdots & \vdots\end{cases} = f_1(t)\left(u_{t_1}(t)-u_{t_2}(t)\right)+f_2(t)\left(u_{t_2}-u_{t_3}\right)$$

$$+f_3(t)\left(u_{t_3}-u_{t_4}\right)+\cdots$$

$$f(t)\longrightarrow F(s)$$

$$e^{at}f(t)\longrightarrow F(s-a)$$

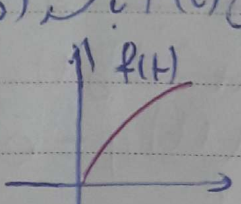
$$f'(t)\longrightarrow sF(s)-f(0)$$

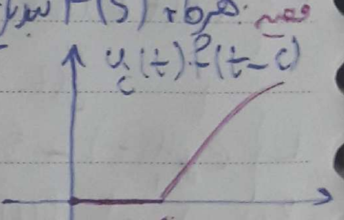
$$\int_0^t f(r)\,dr\longrightarrow \frac{F(s)}{s}$$

$$u_c(t)f(t-c)\longrightarrow e^{-cs}F(s)$$

قضیه: هرگاه $F(s)$ تبدیل لاپلاس $f(t)$ باشد، $e^{-cs}F(s)$ تبدیل لاپلاس تابع زیر خواهد بود

$$u_c(t)f(t-c)=\begin{cases}0 & t<c\\ f(t-c) & t\geq c\end{cases}$$





اثبات:

$$\mathcal{L}\left\{u_c(t)f(t-c)\right\}=\int_0^\infty e^{-st}u_c(t)f(t-c)\,dt=\int_0^c 0+\int_c^\infty e^{-st}f(t-c)\,dt$$

$$\xrightarrow{u=t-c}\int_0^\infty e^{-s(u+c)}f(u)\,du=e^{-cs}F(s)$$

لاپلاس معکوس تابع زیر را بیابید.

$$\frac{e^{-5s}}{2s^2+2s+\frac{3}{2}}$$

$$\frac{1}{2s^2+2s+\frac{3}{2}}=\frac{1}{2(s^2+s+\frac{3}{4})}=\frac{1}{2((s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2})}\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{t}{2}}=g(t)$$

$$\to f(t)=u_5(t)\,g(t-5)=u_5(t)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{t-5}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{(t-5)}{2}}\right)$$

ثابت کردیم که:

$$L\{u_c(t)f(t-c)\}=e^{-cs}F(s)$$

با توجه به رابطه فوق:

$$L\{u_c(t)\}=L\{u_c(t)\times 1\}=\frac{e^{-cs}}{s}$$

روش دوم: تعریف و انتگرال گیری

مثال: لاپلاس توابع زیر را بیابید.

$f(t)=t^2$

$$L\{(t-1)^2u_1(t)\}=\frac{2}{s^3}e^{-s}$$

$f(t)=(t+1)^2 \;،\; f(t-1)=t^2$

$$L\{t^2u_1(t)\}=e^{-s}L\{f(t)\}=e^{-s}\left(\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^2}+\frac{1}{s}\right)$$

$f(t)=-\sin t \;\leftarrow\; f(t-\pi)=\sin t$

$$L\{\sin(t)u_\pi(t)\}=-\frac{1}{s^2+1}e^{-\pi s}$$

$g(t-\frac{\pi}{2})=\sin t \to g(t)=\cos t$

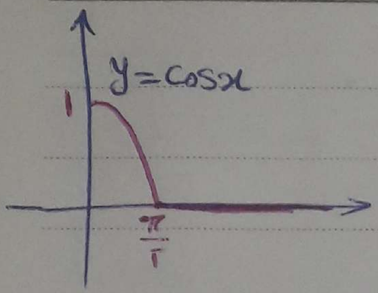
$$L\{e^tu_1(t)+\sin t\,u_{\frac{\pi}{2}}(t)\}=e^{-s}L\{e^{t+1}\}+e^{-\frac{\pi}{2}s}L\{\cos t\}$$

$f(t-1)=e^t \to f(t)=e^{t+1}$

$$=e^{-\frac{\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}+\frac{e^{-s+1}}{s-1}$$

$$L\{e^tu_1(t)\}=\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}>\frac{e^{-s}}{s}$$

Subject:
Date



مثال: لاپلاس تابع رسم شده را بیابید.

$$f(t)=\begin{cases}\cos t & 0\le t\le \frac{\pi}{2}\\ 0 & t>\frac{\pi}{2}\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(t)=\cos t\,(u_0(t)-u_{\frac{\pi}{2}}(t))=\cos t-\cos t\,u_{\frac{\pi}{2}}(t)$$

$$=\cos t+\sin(t-\tfrac{\pi}{2})\,u_{\frac{\pi}{2}}(t)\longrightarrow \frac{s}{s^2+1}+\frac{1}{s^2+1}e^{-\frac{\pi}{2}s}$$

مثال: معادله دیفرانسیل زیر را با تبدیل لاپلاس حل کنید:

$$* \quad y^{(4)}-y=0 \qquad y(0)=y''(0)=y'''(0)=0,\quad y'(0)=1$$

$$L\{y^{(4)}\}=s^4Y(s)-s^3y(0)-s^2y'(0)-sy''(0)-y'''(0)=s^4Y(s)-s^2$$

جایگذاری

$$\Longrightarrow [s^4Y(s)-s^2]-Y(s)=0\longrightarrow Y(s)=\frac{s^2}{s^4-1}$$

از این تابع، تبدیل لاپلاس معکوس گرفته و $g(t)$ را بدست می آوریم.

$$Y(s)=\frac{s^2}{(s^2-1)(s^2+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{s^2-1}+\frac{1}{s^2+1}\right)\xrightarrow{L^{-1}} y(t)=\frac{1}{2}\sinh(t)+\frac{1}{2}\sin t$$

$$* \quad y''+4y=\sin t\,u_{2\pi}(t) \qquad y(0)=y'(0)=0$$

از طرفین تبدیل لاپلاس می گیریم:

$$L\{\sin t\,u_{2\pi}(t)\}=\{\sin(t-2\pi)\,u_{2\pi}(t)\}=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow s^2Y(s)+4Y(s)=\frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}\longrightarrow Y(s)=\frac{e^{-2\pi s}}{(s^2+1)(s^2+4)}$$

PAPCO

$$H(s) = \frac{1}{(s^2+1)(s^2+4)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{s^2+4}\right) \longrightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{3}\left(\sin t - \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

$$y(t) = u_{2\pi}(t)\, h(t-2\pi)$$

$$* \; 2y'' + y' + 2y = g(t) = \begin{cases} 1 & 5 < t < 20 \\ 0 & t < 5,\ t > 20 \end{cases} \qquad y(0) = y'(0) = 0$$

از طریق تبدیل لاپلاس می‌گیریم:

$$2s^2 y(s) + s y(s) + 2y(s) = L\{g(t)\}$$

$$g(t) = 1\left(u_5(t) - u_{20}(t)\right) \Rightarrow L\{g(t)\} = \frac{e^{-5s}}{s} - \frac{e^{-20s}}{s}$$

$$\rightarrow y(s) = \frac{e^{-5s} - e^{-20s}}{s(2s^2+s+2)}$$

$$H(s) = \frac{1}{s(2s^2+s+2)} = \frac{a}{s} + \frac{bs+c}{2s^2+s+2} \rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -1,\ c = \frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{2s^2+s+2} = \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{s+\frac{1}{2}}{2\left[(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}\right]}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{s+\frac{1}{4}}{2\left[(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}\right]} - \frac{\frac{1}{4}}{2\left[(s+\frac{1}{4})^2 + \frac{15}{16}\right]} \Longrightarrow$$

$$h(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{t}{4}} \cos\sqrt{\frac{15}{16}}\, t - \frac{e^{-\frac{t}{4}}}{8} \frac{1}{\sqrt{\frac{15}{16}}} \sin\sqrt{\frac{15}{16}}\, t$$

$$y(t) = u_5(t)\, h(t-5) - u_{20}(t)\, h(t-20)$$

• مشتق گیری از تبدیل لاپلاس

قضیه: اگر تابع $f(t)$ در بازه $t \geq 0$ پیوسته قطعه‌ای بوده و در شرط وجود لاپلاس صدق کند، آنگاه

$$F^{(n)}(s) = \frac{d^nF}{ds^n} = L\{(-t)^n f(t)\}$$

$n=1 \Rightarrow \frac{dF}{ds} = L\{-tf(t)\}$ $\qquad$ $n=2 \Rightarrow \frac{d^2F}{ds^2} = L\{t^2 f(t)\}$

این قضیه از دو جهت کاربرد دارد:

(۱) وقتی لاپلاس توابعی مانند $t^n f(t)$ را می‌خواهیم حساب کنیم.

(۲) لاپلاس معکوس یک تابع را نمی‌دانیم ولی اگر از آن یک بار (یا چند بار) مشتق بگیریم به تابعی تبدیل می‌شود که لاپلاس معکوس آن را بلدیم.

اثبات: به ازای $n=1$

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt \Rightarrow \frac{dF}{ds} = \int_0^\infty \frac{d}{ds} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \int_0^\infty -t e^{-st} f(t)dt = L\{-tf(t)\}$$

مثال: لاپلاس معکوس $F(s) = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$ را پیدا کنید.

$L\{f(t)\} = \tan^{-1}(\frac{1}{s})$ $\qquad$ $L\{-tf(t)\} = \frac{\frac{-1}{s^2}}{1+\frac{1}{s^2}} = \frac{-1}{s^2+1}$

$$\Rightarrow -tf(t) = -\sin t \Rightarrow f(t) = \frac{\sin t}{t}$$

Subject:
Date:

* می توان برخی از انتگرال ها را با استفاده از تعریف لاپلاس محاسبه کرد

$$\int_0^\infty t e^{-4t} \cos 2t \, dt$$

$$L\{t \cos 2t\} = \int_0^\infty e^{-st} \, t \cos 2t \, dt$$

$$\int_0^\infty t \cos 2t \, e^{-4t} \, dt = L\{t \cos 2t\}\Big|^{s=4}$$

برای محاسبه $L\{t\cos 2t\}$ از قضیه قبل استفاده می کنیم:

$$L\{\cos 2t\} = \frac{s}{s^2+4} \qquad L\{-t\cos 2t\} = \frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) = \frac{4-s^2}{(4+s^2)^2}$$

$$L\{t\cos 2t\} = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$\int_0^\infty t\cos 2t \, e^{-4t} \, dt = \frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}\Big|_{s=4} = \frac{3}{100}$$

$$\int_0^\infty e^{-at} f(t) \, dt = L\{f(t)\}\Big|^{s=a}$$

قضیه: اگر تابع $f(t)$ در شرایط قضیه صدق کند و اگر $\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ موجود باشد و $L\{f(t)\} = F(s)$ آنگاه:

$$L\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(u) \, du$$

مثال:

$$L\left\{\underbrace{\frac{1-\cos t}{t}}_{f(t)}\right\}$$

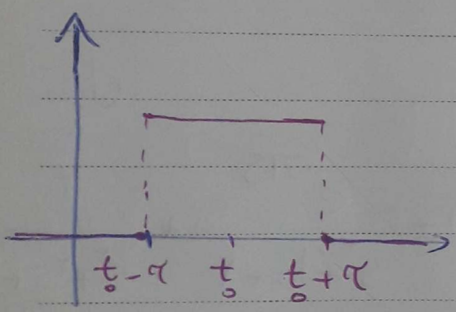
$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t} = \frac{\sin t}{1} = 0 \checkmark$$

$$L\{1-\cos t\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1}$$

$$L\left\{\frac{1-\cos t}{t}\right\} = \int_s^\infty \left(\frac{1}{u} - \frac{u}{u^2+1}\right)du = \ln u - \frac{1}{2}\ln(u^2+1)$$

$$= \ln\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\Bigg|_s^\infty = -\ln\frac{s}{\sqrt{s^2+1}} = \ln\frac{\sqrt{s^2+1}}{s}$$

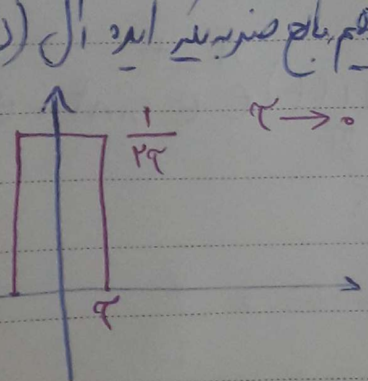
تابع ضربه: در بسیاری از مسائل مهندسی با پدیده های روبرو هستیم که ماهیت ضربه ای دارند. پدیده هایی که بسیار شدیدند ولی در زمان بسیار کوتاه رخ می دهند.



شدت ضربه به صورت زیر تعریف می شود:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = 1$$

اگر تابع $g(t)$ را در لحظه $t=0$ در نظر گرفته و ε را به سمت صفر میل دهیم، تابع ضربه ایده آل (دلتای دیراک) بدست می آید.

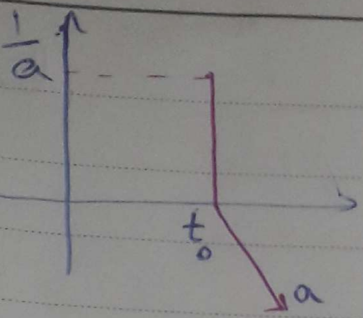


پس ضربه ایده آل:

$$\delta(t) = 0 \qquad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1$$

PAPCO



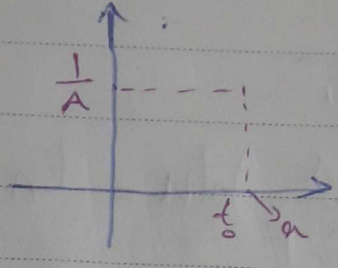
اگر تابع ضربه در $t=t_0$ رخ دهد:

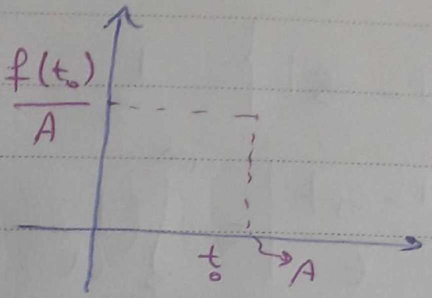
$$\delta(t-t_0)=0 \qquad t\neq t_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)\,dt=1$$

نکته:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt$$





$$L\{\delta(t-t_0)\}=\int_{0}^{\infty} e^{-st}\,\delta(t-t_0)\,dt=e^{-st_0}$$

$$L\{\delta(t)\}\overset{t_0=0}{=}1$$

مثال:

$$y''+2y'+2y=\delta(t-\pi) \qquad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

$$s^2y(s)-1+2sy(s)+2y(s)=e^{-\pi s}\rightarrow y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+2s+2}+\frac{1}{s^2+2s+2}$$

$$H(s)=\frac{1}{s^2+2s+2}=\frac{1}{(s+1)^2+1}\longrightarrow h(t)=e^{-t}\sin t$$

$$y(t)=u_\pi(t)h(t-\pi)+h(t)$$

$$y(t)=u_\pi(t)\left(e^{-(t-\pi)}\sin(t-\pi)\right)+e^{-t}\sin t=-u_\pi(t)e^{\pi}e^{-t}\sin t+e^{-t}\sin t$$

$$=e^{-t}\sin t\left(-u_\pi(t)e^{\pi}+1\right)$$

Subject :
Date

انتگرال تلفیقی: اگر $F(s)=L\{f(t)\}$ و $G(s)=L\{g(t)\}$ هر دو به ازای $s>a$ موجود باشند و $H(s)=F(s)G(s)$ آنگاه:

$$h(t)=f(t)*g(t)=\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau=\int_0^t f(t)g(t-\tau)d\tau$$

که $h(t)$ را تلفیق f و g گوییم و انتگرال فوق را انتگرال تلفیقی می‌نامیم.

اثبات:

$$F(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \qquad G(s)=\int_0^\infty g(t)e^{-st}dt$$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-s(u+v)}f(u)g(v)\,dv\,du$$

تغییر متغیر $u+v=t \rightarrow v=t-u$

$$F(s)G(s)=\int_0^\infty\int_u^\infty e^{-st}f(u)g(t-u)\,dt\,du$$

$$=\int_0^\infty\int_0^t e^{-st}f(u)g(t-u)\,du\,dt=\int_0^\infty e^{-st}\int_0^t f(u)g(t-u)\,du\,dt$$

$$=L\{h(t)\}$$

مثال:

$$\cos t*1=\int_0^t \cos\tau\, d\tau=\sin t$$

$$\frac{s}{s^2+1}\times\frac{1}{s}=\frac{1}{s^2+1}$$

مثال: لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید.

PaPCO

$$h(t)=\int_0^t (t-\tau)^2 \cos 2\tau \, d\tau \qquad f(t)=t^2 \;,\; g(t)=\cos 2t$$

$$L\{h(t)\}=F(s)\cdot G(s)=\frac{2}{s^3}\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{2}{s^2(s^2+4)}$$

$$h(t)=\int_0^t \lambda^5 e^{3(t-\lambda)}\, d\lambda \qquad f(t)=t^5 \qquad g(t)=e^{3t}$$

$$L\{h(t)\}=F(s)G(s)=\frac{5!}{s^6}\cdot\frac{1}{s-3}$$

مثال: تبدیل معکوس تابع زیر را به صورت انتگرال بنویسید.

$$y(s)=\frac{2s+2}{[(2s+1)^2+1]s^5}=\underbrace{\frac{2s+2}{(2s+1)^2+1}}_{F(s)}\times\underbrace{\frac{1}{s^5}}_{G(s)}$$

$$L^{-1}\left(\frac{2s+2}{(2s+1)^2+1}\right)=L^{-1}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2s+2}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{s+\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}}{(s+\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4}}\right)$$

$$\Rightarrow f(t)=\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t}{2}}\cos\frac{t}{2}+e^{-\frac{t}{2}}\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$G(s)=\frac{1}{s^5}\Rightarrow g(t)=\frac{t^4}{24}$$

$$h(t)=\int_0^\infty f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau=\frac{1}{48}\int_0^t e^{-\frac{\tau}{2}}\left(\cos\frac{\tau}{2}+\sin\frac{\tau}{2}\right)(t-\tau)^4\,d\tau$$

مثال: معادله زیر را حل کنید.

$$y(t)=t^2+\int_0^t \sin(t-\tau)\,y(\tau)\,d\tau$$

$$\Rightarrow y(s)=\frac{2}{s^3}+\frac{1}{s^2+1}y(s)\Rightarrow y(s)=\frac{2(s^2+1)}{s^5}=\frac{2}{s^3}+\frac{2}{s^5}$$

$$\Rightarrow y(t) = t^2 + \frac{t^4}{12}$$

مثال: جواب معادله زیر را برحسب انتگرال تلفیقی بنویسید.

$$y'' + 4y' + 4y = g(t)$$
$$y(0) = 2 ,\ y'(0) = 3$$

$$\xrightarrow{L} s^2 y(s) - 2s - 3 + 4sy(s) - 8 + 4y(s) = G(s)$$

$$\Rightarrow y(s) = \frac{G(s)}{(s+2)^2} + \frac{2s+5}{(s+2)^2} \Longrightarrow L^{-1}\left(\frac{2s+5}{(s+2)^2}\right) = L^{-1}\left(\frac{2s+4+1}{(s+2)^2}\right) =$$

$$L^{-1}\left(\frac{2(s+2)}{(s+2)^2} + \frac{1}{(s+2)^2}\right) = 2e^{-2t} + te^{-2t}$$

$$L^{-1}\Big(\underbrace{G(s)}_{g(t)} \times \underbrace{\frac{1}{(s+2)^2}}_{te^{-2t}}\Big) = \int_0^t g(t-\tau)\,\tau e^{-2\tau}\, d\tau$$

$$\Rightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,\tau e^{-2\tau}\, d\tau + e^{-2t}(2+t)$$

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس معادله انتگرالی زیر را حل کنید.

$$y' - \frac{1}{2}\int_0^t (t-u)^2 y(u)\, du = -t\,\delta(t-\pi) \qquad y(0) = 1$$

$$\Rightarrow sy(s) - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{s^3} y(s)\right) = \left(e^{-\pi s}\right)' = -\pi e^{-\pi s}$$

$$y(s) = \left(1 - \pi e^{-\pi s}\right)\left(\frac{s^3}{s^4-1}\right) = \frac{s^3}{s^4-1} - \pi e^{-\pi s}\left(\frac{s^3}{s^4-1}\right)$$

$$h(t) = L^{-1}\left(\frac{s^3}{s^4-1}\right) = L^{-1}\left(\frac{s^3}{(s-1)(s+1)(s^2+1)}\right) = L^{-1}\left(\frac{a}{s-1} + \frac{b}{s+1} + \frac{cs+d}{s^2+1}\right)$$

$$\Rightarrow h(t) = ae^{t} + be^{-t} + c\cos t + d\sin t$$

$$y(t) = h(t) - \pi u_{\pi}(t)\, h(t-\pi)$$

دستگاه معادلات مرتبه اول

در حالت کلی دستگاه n معادله خطی مرتبه اول به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ \vdots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t) \end{cases}$$

نکته: اگر g_1 تا g_n صفر باشد، دستگاه را همگن گویند.

قضیه: اگر توابع a_{ij} و g_i در فاصله $\alpha < x < \beta$ پیوسته باشند، آنگاه یک جواب یکتای $x_1 = Q_1(t)$ ... $x_n(t) = Q_n(t)$ وجود دارد که در شرایط $x_1(t_0) = x_1^0,\ x_2(t_0) = x_2^0$ ... صدق کند $(\alpha < t_0 < \beta)$

یک دستگاه n معادله‌ای قابل تبدیل به یک معادله دیفرانسیل مرتبه n و برعکس

$$y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= y' \\ x_3 &= y'' \\ &\vdots \\ x_n &= y^{(n-1)} \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{از طرفین مشتق}} \quad \begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_n' &= y^{(n)} = F(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{aligned}$$

مثال: $t^2u'' + tu' + (t^2-1)u = 0$

$$\left.\begin{matrix} x_1 = u \\ x_2 = u' \end{matrix}\right\} \longrightarrow \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = u'' = -\dfrac{u'}{t} - \dfrac{(t^2-1)}{t^2}u = \dfrac{-x_2}{t} - \dfrac{t^2-1}{t^2}x_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \dfrac{-1}{t^2}\left(x_2 t + (t^2-1)x_1\right) \end{cases}$$

همین طور می‌توان یک دستگاه معادله ای را به یک مرتبه n تبدیل کنیم که یکی از روش های حل دستگاه است که روش حذفی نامیده می‌شود. اینگونه عمل می‌کنیم که با حذف $(n-1)$ متغیر از $(n-1)$ معادله به یک معادله مرتبه n می‌رسیم.

این روش برای معادلات همگن و ناهمگن برقرار است.

مثال: دستگاه زیر را حل کنید

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 \Rightarrow x_2 = x_1' - x_1 \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 \Rightarrow (x_1' - x_1)' = 4x_1 - 2(x_1' - x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1'' + x_1' - 6x_1 = 0 \xrightarrow{x_1 = e^{rt}} r^2 + r - 6 = 0 \longrightarrow r = -3, 2$$

$$\Rightarrow x_1 = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$$

$$x_2 = x_1' - x_1 = -3c_1e^{-3t} + 2c_2e^{2t} - c_1e^{-3t} - c_2e^{2t} = -4c_1e^{-3t} + c_2e^{2t}$$

* در روش حذفی اگر مرتبه معادلات بالاتر باشد بهتر است از عملگر D استفاده شود. اگر عملگر D به صورت $D = \frac{d}{dt}$ تعریف شود داریم:

$$ax'' + bx' + cx = (aD^2 + bD + c)x = Lx$$

عملگر خطی که روی x اثر می‌کند

مثال:

$$\begin{cases}(x_1''+x_1'-x_1)+(x_2''-3x_2'+2x_2)=0\\(x_1'+2x_1)+(2x_2'-4x_2)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(D^2+D-1)x_1+(D^3-3D+2)x_2=0\\(D+2)x_1+(2D-4)x_2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_1x_1+L_2x_2=0\\L_3x_1+L_4x_2=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(L_2L_3-L_1L_4)x_2=0\Rightarrow\left[(D^3-3D+2)(D+2)-(D^2+D-1)(2D-4)\right]x_2=0$$

$$\Rightarrow(D^3-D^2-2D)x_2=0\Rightarrow x_2'''-x_2''-2x_2'=0\xrightarrow{x_2=e^{rt}}r=0,-1,2$$

$$\Rightarrow x_2=c_1+c_2e^{-t}+c_3e^{-t}$$

با جایگذاری x_2 در یکی از معادلات، x_1 بدست می آید.

استقلال خطی: بردارهای $x^{(1)}$ تا $x^{(k)}$ را وابسته خطی گویند هرگاه بتوان ضرایب c_1 تا c_k (نه همگی باهم صفر نباشند) را طوری پیدا کرد که:

$$c_1x^{(1)}+c_2x^{(2)}+\dots+c_kx^{(k)}=0$$

در غیر این صورت مستقل اند.

اگر بردارهای $x^{(1)}$ تا $x^{(k)}$ را جایگذاری کنیم، به معادله $AC=0$ می رسیم:

$$A=\begin{bmatrix}x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(k)}\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\end{bmatrix}\quad \text{و}\quad C=\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_k\end{bmatrix}$$

شرط اینکه این معادله دارای جواب غیرصفر باشد: $\det(A)=0$

پس شرط اینکه n بردار مستقل باشد، $\det(A)\neq 0$ که A ماتریسی است که ستون های آن $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ می باشند.

مثال: وابستگی ۳ بردار زیر را بررسی کنید

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$c_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases}c_1+c_3=0\\ c_1+c_2=0\\ c_2+c_3=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \qquad AC=0$$

$$\begin{vmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=2\neq 0$$

شرط اینکه معادله جواب غیرصفر داشته باشد، $\det(A)=0$

پس ۳ بردار مستقل خطی اند.

معادله همگن $x'=P(t)x$ (1) را در نظر بگیرید که x_{n+1} ، $P_{n\times n}$ می باشد. فرض کنید همه مولفه های $P(t)$ درباره $\alpha<t<\beta$ پیوسته باشند. ۳ قضیه زیر را داریم:

قضیه ۱: اگر $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ ، ... و $x^{(n)}$ جواب دستگاه (1) باشند و c_1 تا c_n ثابت های دلخواه و $X=c_1x^{(1)}+\dots+c_nx^{(n)}$ نیز جواب دستگاه خواهد بود.

$$A = c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}$$

$$A' = \underbrace{c_1 x'^{(1)}}_{p(t)x_1} + \underbrace{c_2 x'^{(2)}}_{p(t)x_2} + \dots + \underbrace{c_n x'^{(n)}}_{p(t)x_n} = p(t)\underbrace{\left[c_1 x^{(1)} + \dots + c_n x^{(n)}\right]}_{A} = p(t)A$$

$$\Rightarrow A' = p(t)A$$

قضیه ۲: اگر $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ به ازای هر $\alpha < x < \beta$ جواب‌های مستقل خطی دستگاه (۱) باشند، آنگاه هر جواب این دستگاه را می‌توان به صورت ترکیب خطی $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ نوشت.

قضیه ۳: اگر $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ جواب دستگاه (۱) باشد رونسکین آنها که به صورت زیر تعریف می‌شود یا صفر است و یا هیچگاه صفر نمی‌شود.

$$W\left(x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right) = \begin{vmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \dots & x^{(n)} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{vmatrix}$$

دستگاه خطی همگن با ضرایب ثابت

حالت خاصی را در نظر بگیرید که $p(t)$ یک ماتریس ثابت مانند A باشد:

$$x' = p(t)x \longrightarrow \underset{n\times 1}{x'} = \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{x}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \vdots & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \vdots & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{cases}$$

$x' = Ax \qquad x = \xi e^{rt}$ (Kisi ← بردار ثابت) $\Rightarrow \xi r e^{rt} = A\xi e^{rt} \Rightarrow \underset{n\times n}{A}\ \underset{n\times 1}{\xi} = r_1 \underset{n\times 1}{\xi}$

پس r ها مقادیر ویژه و ξ ها بردارهای ویژه A می باشند. $\Rightarrow (A-rI)\xi=0$ ← شرط وجود جواب غیر صفر

مثال:

$$x' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} x \qquad x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2 & x_1(0)=1 \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 & x_2(0)=3 \end{cases}$$

مقادیر و بردارهای ویژه A را پیدا می کنیم:

$$|A-rI| = 0 \Rightarrow r = -1, -3 \Rightarrow \begin{cases} r=-1 \rightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = x_1 \rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ r=-3 \rightarrow x_1 = -x_2 \rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$x^{(1)} = \xi_1 e^{r_1 t} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} \qquad x^{(2)} = \xi_2 e^{r_2 t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t}$$

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \xrightarrow[t=0]{x(0)=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} c_1 - c_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2e^{-t} - e^{-3t} \\ x_2 = 2e^{-t} + e^{-3t} \end{cases}$$

مقادیر ویژه مختلط

در معادله $x' = Ax$، اگر A دارای مولفه های حقیقی باشد و یکی از مقادیر ویژه آن مختلط باشد، مزدوج آن نیز مقدار ویژه A خواهد بود.

$$r = \lambda + \mu i \rightarrow \xi = a + bi \qquad x = \xi e^{rt} = (a+bi)e^{(\lambda+\mu i)t}$$

$$r = \lambda - \mu i \rightarrow \xi = a - bi$$

عبارت فوق را آنقدر ساده می کنیم تا به صورت $u + vi$ شود و u و v ها را به عنوان $x^{(1)}$ و $x^{(2)}$ اختیار می کنیم.

مثال:

$$x' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} x \qquad |A-rI| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 3-r & -2 \\ 4 & -1-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r = 1 \pm 2i$$

ابتدا مقادیر ویژه ماتریس را حساب می کنیم:

$$r = 1+2i \rightarrow \begin{cases} (2-2i)x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_1 + (-2-2i)x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_2 = (1-i)x_1$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ (1-i)x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

$$\to X = \begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} e^{(1+2i)t} = \begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix} e^{t} e^{2it} = e^{t}\begin{pmatrix}1\\1-i\end{pmatrix}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

$$= e^t \begin{pmatrix}\cos 2t + i\sin 2t\\ (\cos 2t+\sin 2t)+i(\sin 2t-\cos 2t)\end{pmatrix} = \underbrace{e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}}_{u} + \underbrace{ie^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}}_{v}$$

مقادیر ویژه تکراری: فرض کنید یک مقدار ویژه A مانند $r=p$ یک بار تکرار شده باشد، دو حالت پیش می‌آید:

۱) $r=p$ منجر به دو بردار ویژه مستقل شود. $\xi_1 \neq \xi_2$

$r=p, p \to \xi_1, \xi_2$

$x^{(1)} = \xi_1 e^{pt}, \quad x^{(2)} = \xi_2 e^{pt}$

۲) اگر $r=p$ منجر به یک بردار ویژه شود.

$r=p, p \to \xi$

$$x^{(1)} = \xi e^{pt}, \quad x^{(2)} = \xi t e^{pt} + \eta e^{pt} \qquad \eta = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\ \vdots\\x_n\end{pmatrix}$$

η را از حل معادله $(A-pI)\eta = \xi$ بدست می‌آوریم

حالتی را فرض کنید که ریشه $r=p$ ۳ بار تکرار شده باشد. سه حالت پیش می‌آید:

۱) $r=p$ منجر به سه بردار ویژه مستقل شود:

$x^{(1)} = \xi_1 e^{pt} \quad x^{(2)} = \xi_2 e^{pt} \quad x^{(3)} = \xi_3 e^{pt}$

۲) $r=p$ منجر به دو بردار ویژه شود:

$x^{(1)} = \xi_1 e^{pt}, \quad x^{(2)} = \xi_2 e^{pt}, \quad x^{(3)} = \xi t e^{pt} + \eta e^{pt}$

$(A-pI)\eta = \xi_1$

۳) $r=p$ منجر به فقط یک بردار ویژه شود.

$x^{(1)} = \xi_1 e^{pt}$

$x^{(2)} = \xi_1 t e^{pt} + \eta e^{pt} \qquad (A-pI)\eta = \xi_1$

$x^{(3)} = \xi_1 \frac{t^2}{2} e^{pt} + \eta t e^{pt} + \delta e^{pt} \qquad (A-pI)\delta = \eta$

PAPCO

مثال: دستگاه زیر را حل کنید.

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} X \quad \text{یا} \quad \begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + x_3 \\ x_2' = 2x_1 + x_2 - x_3 \\ x_3' = -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \end{cases}$$

$$|A - rI| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 1-r & 1 & 1 \\ 2 & 1-r & -1 \\ -3 & 2 & 4-r \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow r = 2, 2, 2$$

$$r = 2 \longrightarrow \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad (1), (2) \Rightarrow x_1 = 0$$

$$x_2 + x_3 = 0 \longrightarrow x_2 = -x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^{(1)} = \xi_1 e^{\rho t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$X^{(2)} = \xi t e^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \xrightarrow{\rho = 2} (A - \rho I)\eta = \xi \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

یک دستگاه ساده است:

$$\eta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$x^{(3)} = \xi \frac{t^2}{2} e^{\rho t} + \eta t e^{\rho t} + \delta e^{\rho t} \qquad \rho = 2$$

$$\Rightarrow (A - 2I)\delta = \eta$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \delta_1 = -1 \\ \delta_2 = 0 \\ \delta_3 = -3 \end{matrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow x^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

ماتریس اساسی

فرض کنید $x^{(1)}$ ، $x^{(2)}$ ، ... تا $x^{(n)}$ یک مجموعه جواب اساسی معادله $x' = P(t)x$ باشند. در این صورت ماتریس $\psi(t)$ را که ستون های آن را $x^{(1)}$ تا $x^{(n)}$ تشکیل می دهند را ماتریس اساسی این معادله می گویند.

$$\psi(t) = \begin{pmatrix} x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots & x^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{pmatrix}$$

PAPCO

$$X_c = c_1 X^{(1)} + c_2 X^{(2)} + \cdots + c_n X^{(n)} = \Psi(t) c \qquad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

جواب همگن یک دستگاه به صورت $X_c = \Psi c$ قابل بیان است. هرگاه جواب های یک معادله را طوری ترکیب کنیم که $\Psi(t_0) = I$، ماتریس اساسی را با $\Phi(t)$ نشان می دهیم.

دستگاه خطی ناهمگن

$$\underset{n\times 1}{X'} = \underset{n\times n}{p(t)} \underset{n\times 1}{X} + \underset{n\times 1}{g(t)}$$

۱- تغییر پارامترها　۲- قطری سازی　۳- ضرایب نامعین

روش تغییر پارامترها

برای حل دستگاه $X' = p(t) X + g$ با روش تغییر پارامترها، مانند فصل ۳ عمل می کنیم جواب معادله همگن برابر $X_c = \Psi_c$ می باشند ($c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$) جواب معادله ناهمگن را برابر $X_p = \Psi u$ درنظر گرفته وسعی می کنیم u را بدست آوریم

$$X' = p(t) X + g(t)$$

$$X_p = \Psi u \qquad X'_p = \Psi' u + \Psi u'$$

$$\Rightarrow \Psi' u + \Psi u' = p(t) \Psi u + g(t)$$

چون ستون Ψ جواب معادله همگن است ($X' = p(t) X$)

$$\Psi' = p(t) \Psi$$

$$\Rightarrow p(t) \Psi u + \Psi u' = p(t) \Psi u + g(t) \Rightarrow \Psi u' = g(t)$$

$$\Rightarrow u = \int \psi^{-1} g(s)\,ds$$

۱ـ معادله همگن را حل می کنید (مقدار ویژه - بردار ویژه)

۲ـ ماتریس اساسی را تشکیل می دهید.

۳ـ معادله $\psi u' = g(t)$ را حل می کنید.

۴ـ $x = x_c + x_p = \psi c + \psi u$ اگر در مرحله ۳ ثوابت انتگرال گیری را لحاظ کرده اید:

$$x = x_p = \psi u$$

اعمال شرایط اولیه

$$x(t_0) = x_0$$

$$x = x_c + x_p \begin{cases} x_c = \psi c \\ x_p = \psi u \rightarrow u' = \psi^{-1} g \rightarrow u = \int \psi^{-1} g(s)\,ds \end{cases}$$

$$x = \psi c + \int \psi^{-1}(s) g(s)\,ds$$

بدون اینکه به کلیت مسئله خللی وارد شود، کرانه های انتگرال گیری را بصورت زیر در نظر می گیریم:

$$x = \psi c + \psi \int_{t_0}^{t} \psi^{-1}(s) g(s)\,ds$$

$$x(t_0) = x_0 \longrightarrow x(t_0) = \psi c = x_0 \rightarrow c = \psi^{-1} x_0$$

مثال: $X' = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}2e^{-t}\\ 3t\end{pmatrix}$

گام ۱: حل معادله همگن

$$X' = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}X$$

$$|A-rI| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix}-2-r & 1\\ 1 & -2-r\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow r = -3, -1$$

$$r=-3 \longrightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \longrightarrow X^{(1)} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-3t} = \begin{pmatrix}e^{-3t}\\ -e^{-3t}\end{pmatrix}$$

$$r=-1 \longrightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} \longrightarrow X^{(2)} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{-t} = \begin{pmatrix}e^{-t}\\ e^{-t}\end{pmatrix}$$

گام ۲: تشکیل ماتریس Ψ

$$\Psi = \begin{pmatrix}e^{-3t} & e^{-t}\\ -e^{-3t} & e^{-t}\end{pmatrix}$$

گام ۳: حل معادله $\Psi u' = g(t)$

$$\begin{pmatrix}e^{-3t} & e^{-t}\\ -e^{-3t} & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1'\\ u_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2e^{-t}\\ 3t\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-3t}u_1' + e^{-t}u_2' = 2e^{-t}\\ -e^{-3t}u_1' + e^{-t}u_2' = 3t\end{cases} \qquad ①,② \rightarrow 2e^{-t}u_2' = 2e^{-t} + 3t$$

$$u_1' = e^{2t} - \frac{3}{2}te^{3t} \longrightarrow u_2 = t + \frac{3}{2}te^{t} - \frac{3}{2}e^{t} + c_2$$

$$\Rightarrow u_2' = 1 + \frac{3}{2}te^{t} \longrightarrow u_1 = \frac{1}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}te^{3t} + \frac{1}{6}e^{3t} + c_1$$

$$X = \Psi c + \Psi u = \begin{pmatrix}e^{-3t} & e^{-t}\\ -e^{-3t} & e^{-t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}e^{2t} + \cdots\\ t + \frac{3}{2}te^{t} + \cdots\end{pmatrix}$$

مثال: $X' = \begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}-\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}$

Subject:
Date:

① حل معادله همگن:

$$|A - rI| = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 2-r & 5 \\ 1 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \rightarrow r = \pm i$$

$$r = i \rightarrow \begin{cases} (2-i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + (-2-i)x_2 = 0 \end{cases} \rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 2-i \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

②

$$r = i \rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix}$$

$$X = \xi e^{pt} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2-i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t)$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} 5\cos t + 5\sin t\, i \\ (2\cos t + \sin t) + (2\sin t - \cos t)\, i \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} u = \begin{pmatrix} 5\cos t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix} \\ v = \begin{pmatrix} 5\sin t \\ 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{pmatrix}$$

$$\Psi u' = g(t) \rightarrow \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1 = \frac{1}{5}\left(2t - \frac{3}{2}\sin 2t - \frac{1}{2}\cos 2t\right) \\ u_2 = \frac{1}{5}\left(-t - \frac{1}{2}\sin 2t + \frac{3}{2}\cos 2t\right) \end{cases}$$

$$X = \Psi c + \Psi u = \begin{pmatrix} 5\cos t & 5\sin t \\ 2\cos t + \sin t & 2\sin t - \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

Subject:
Date

روش قطری کردن

یادآوری ریاضی ۲: اگر ستون های یک ماتریس بر هم عمود بوده و یکه باشند آن ماتریس را متعامد گویند.

$B^t = B^{-1}$

* فرض کنید مقادیر و بردارهای ویژه ماتریس متقارن 2×2 ماتند A را بدست آورده، یکه و متعامد کرده و در ستون های ماتریس ماتند T قرار دهید:

$T^t A T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

A : ثابت

$x' = Ax + g(t)$

تغییر متغیر $X = TY$ را اعمال می کنیم:

$TY' = ATY + g$

اگر T متعامد باشد می توان به جای T^{-1} از T^t استفاده کرد.

$\Rightarrow Y' = (T^{-1}AT)y + T^{-1}g \Rightarrow$

$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + T^{-1}g$

معادلات y_1 و y_2 کاملا مستقل شد. پس می توان هرکدام را جداگانه حل کرد.

$x' = Ax + g(t)$

بردارهای ویژه A را بدست آورده و در ستون های یک ماتریس به نام T قرار می دهیم.

$|A - rI| = 0 \quad \begin{vmatrix} r_1 \to u_1 \\ r_2 \to u_2 \end{vmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$

$X = TY \to TY' = A(TY) + g(t) \to y' = \underbrace{(T^{-1}AT)}_{\begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}} y + T^{-1}g$

اگر A متقارن باشد آنگاه بردارهای ویژه بر هم عمود شده در نتیجه با یکه کردن آنها می‌توان ماتریس T را متعامد کرد ($T^{-1}=T^{t}$)

$$y' = (T^{t}AT)y + T^{t}g$$

مثال:

$$X' = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}X + \begin{pmatrix}2e^{t}\\ 3t\end{pmatrix}$$

$$|A-rI| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix}-2-r & 1\\ 1 & -2-r\end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{cases} r=-3 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\\ r=-1 \rightarrow \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\end{cases}$$

بردارهای ویژه را یکه کرده و در ستون‌های T قرار می‌دهیم.

$$T = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \xrightarrow{\text{تغییر متغیر}} X = TY \longrightarrow Y' = (T^{t}AT)y + T^{t}g$$

$$Y' = \begin{pmatrix}-3 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}Y + \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2e^{t}\\ 3t\end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} y_1' &= -3y_1 + \sqrt{2}e^{t} - \frac{3}{\sqrt{2}}t\\ y_2' &= -y_2 + \sqrt{2}e^{-t} + \frac{3}{\sqrt{2}}t\end{aligned}$$

با ضرایب نامعین y_1 و y_2 را بدست می‌آوریم $\Longrightarrow$

$$X = TY = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

روش ضرایب نامعین

اگر $g(t)$ جزء توابعی باشد که در بخش ضرایب نامعین فصل ۳ گفتیم می‌توان دستگاه را با روش ضرایب نامعین حل کرد.

مراحل:

۱) ابتدا معادله همگن را حل می کنیم برای اینکه بررسی کنیم جواب همگن با g(t) تداخلی نداشته باشد. اگر تداخل داشت علاوه بر اینکه جواب خصوصی را در t ضرب می کنیم، خود آن را نیز در نظر می گیریم.

۲) نوشتن جواب خصوصی

۳) محاسبه ضرایب

۴) مجموع جواب خصوصی و همگن

مثال:

$$X' = \begin{pmatrix} -\frac{۵}{۴} & \frac{۳}{۴} \\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۵}{۴} \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} ۲t \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$|A - rI| = ۰ \rightarrow \begin{vmatrix} -\frac{۵}{۴}-r & \frac{۳}{۴} \\ \frac{۳}{۴} & -\frac{۵}{۴}-r \end{vmatrix} = ۰ \rightarrow \begin{cases} r_1 = -\frac{۱}{۲} \rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} \\ r_2 = -۲ \rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} ۱ \\ -۲ \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$X_c = c_1 \xi_1 e^{r_1 t} + c_2 \xi_2 e^{r_2 t} = c_1 \begin{pmatrix} ۱ \\ ۱ \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{۲}} + c_2 \begin{pmatrix} ۱ \\ -۱ \end{pmatrix} e^{-۲t}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} ۲t \\ e^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} e^t \Rightarrow X_p = (at + b) + ce^t$$

a و b بردارهای ۲×۱ می باشند

$$X' = AX + \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} e^t$$

$$X_p' = a + ce^t$$

$$\Rightarrow a + ce^t = AX_p + \begin{pmatrix} ۲ \\ ۰ \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} ۰ \\ ۱ \end{pmatrix} e^t$$

$$X_p = at + b + ce^t$$

Subject:
Date

$$\begin{cases} a = Ab \\ c = Ac + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ Aa + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow A\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$\Longrightarrow \dots$

مثال:

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$$

$$|A - rI| = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} 2-r & -1 \\ 3 & -2-r \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow r = \pm 1$$

$$r = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^{(1)} = \xi_1 e^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$r = -1 \rightarrow \xi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow x^{(2)} = \xi_2 e^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$$

$$g(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$x' = Ax + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t \rightarrow x_p = ate^t + be^t + ct + d$$

$$x_p' = ae^t + ate^t + be^t + c$$

جایگذاری می‌کنیم:

$$ae^t + ate^t + be^t + c = A\underline{\underline{x}} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t$$

$$x_p = ate^t + be^t + ct + d$$

Subject:
Date

$$\begin{cases} e^t & a+b = Ab + \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \\ e & C = Ad \\ t & AC + \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0 \\ te^t & a = Aa \end{cases}$$

$a = Aa \longrightarrow (A - I)a = 0 \longrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ 2a_1 - 2a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = a_2 \longrightarrow a\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

معادله به صورت $tx' = AX + g$

$$tx' = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}1-t^2\\ 2t\end{pmatrix}$$

از تغییر متغیر $z = \ln t$ استفاده می‌کنیم

$$x' = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = \frac{dx}{dz} \cdot \frac{1}{t}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dz} = AX + g(t = e^z)$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dz} = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix} X + \begin{pmatrix}1-e^{2z}\\ 2e^z\end{pmatrix}$$

که پس از حل این معادله به جای z قرار می‌دهیم $\ln t$

محدودیت روش قطری کردن

$x' = AX + g(t)$

$$T = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{pmatrix}$$

ماتریس A باید قطری پذیر بوده یا به عبارتی دو بردار ویژه متمایز داشته باشد (برای دوتایی)

$\Downarrow$

اگر u_1 و u_2 مثل هم باشند، به کار نمی‌خورد